論　文

不確定入札に基づく真実申告最良な相互依存価値オークション

伊藤　孝行[†a)]　　ディビッド　パークス[††b)]

A Truthful Interdependent Value Auction Based on Contingent Bids

Takayuki ITO[†a)] and David C. PARKES[††b)]

あらまし　本論文では，プレイヤの価値が他のプレイヤの価値に依存するという相互依存価値を想定した場合のオークションを設計する．本オークションでは，Dasgupta and Maskin [1] による不確定入札（Contingent Bids）モデルを採用する．不確定入札モデルでは，「もしプレイヤ 1 が財 A に対して x 円入札するなら，私は y 円入札する」というような入札形式を用いる．本論文の貢献は，第 1 に，相互依存価値を前提とした，単一財の取引において線形の相互に依存する評価関数モデルを提案する点である．第 2 に，線形の相互依存価値モデルが単一財第二価格オークションにおいて経済的に効率的（Efficient）なオークションが存在するような条件を示す点である．本オークションは勝者と支払額を不確定入札によって定義される評価関数の写像の不動点を用いて計算することによって，真実申告最良（Truthful）で効率的となる．第 3 の貢献は，上記の提案オークションよりも，収益を改善できる単一財オークションを探索によって発見する手法を提案する点である．

キーワード　相互依存価値オークション，線形評価関数モデル，収益改善，計算論的メカニズムデザイン，マルチエージェントシステム

1. まえがき

本論文では，相互に依存する価値をもつプレイヤ（入札者）に基づくオークション [2] を設計する．ここでは，財の割当に対して，あるプレイヤのもつ価値が，他のプレイヤのもつ価値に依存する．

一般に，商取引やオークションにおいて，プレイヤ間の価値が相互に依存したような割当問題は多く見られる．例えば，ビンテージ物のワインをオークションにかける場合に，あるプレイヤは似たようなワインを試飲したことがあったり，あるプレイヤはそのワインの専門家による評価を知っていたり，または，あるプレイヤはそのワインについて全く知らなかったりする状況がある．このような状況では，そのワインの評価値が，プレイヤ間で互いに依存することが想定できる．

経済理論の分野でも，相互依存価値に基づく効率的かつ最適な（Optimal）オークションの設計が行われている．特に，あるプレイヤのもつシグナルが，単一の数で表現できるという，単一次元シグナルの仮定（厳密にはこれに加えて単調性も必要）のもとでは，（事後）効率的な（Efficient）オークションの存在が示されている [3]．シグナルとは，価値を含むそのプレイヤがもつ個人的情報である．より一般的なモデルとして複数の次元をもつシグナルを仮定すると，ある均衡において効率的な結果をもたらすオークションが存在しないという極めて否定的な結果も存在する [1], [4].

本論文でも単一次元モデルを採用する．特に本論文では Dasgupta and Maskin [1] に基づいて，不確定入札（Contingent Bids）モデルを採用する．不確定入札モデルを採用することによって，本研究は他の相互依存価値モデルの関連研究とは異なる．次の章で議論するように，不確定入札ではない他のモデルとして，直接顕示フレームワーク（Direct Revelation Framework）がある．直接顕示フレームワークを仮定する場合，入札をするプレイヤにとって困難が生じる．例えば，既存の直接顕示フレームワークでは，プレイヤはメカニズムに対して，自分と他のプレイヤのシグナルのとり得る値（値域）を送る必要がある．直感的には，現実的には知りようのない他のプレイヤのとり

† 名古屋工業大学大学院工学研究科，名古屋市
Graduate School of Engineering, Nagoya Institute of Technology, Gokiso, Showa-ku, Nagoya-shi, 466–8555 Japan
†† ハーバード大学工学及び応用科学科，米国
Division of Engineering and Applied Science, Faculty of Arts and Sciences, Harvard University, 209 Maxwell Dworkin, 33 Oxford University, Cambridge 02138, USA
a) E-mail: ito.takayuki@nitech.ac.jp
b) E-mail: parkes@eecs.harvard.edu

得るシグナルまで推定しなければならない．不確定入札を用いれば，プレイヤ 1 は「プレイヤ 2 の価値が y 円のとき，私の価値は x 円とする」という情報を入札することができる．不確定入札では関数形式で入札することによって，シグナルの値域を入札する必要がなくなる．すなわち，不確定入札を用いれば，直接顕示フレームワークで必要とされるような，プレイヤがメカニズムに，他のプレイヤのシグナルを送ることをしなくてもよい．ただし，Dasgupta and Maskin [1] が指摘するように，不確定入札も困難な点はあることは確かである．例えば，上のワインの例では，すべてのプレイヤは，ワインの質に関して（不確定入札によって）取引をするための入札表現規則についてオークショニアと合意を得ている必要がある．以上の観点から，本論文は，直接顕示メカニズムを扱った Dash ら [5] と Ito ら [6], [7] 等の分散 AI の分野での関連研究とも異なっている．

本論文の主な貢献は以下の三つである．第 1 に，相互依存価値を前提とした，単一財の取引において線形の相互に依存する評価関数モデルを提案する点である．第 2 に，線形の相互依存価値モデルが単一財第二価格オークションにおいて経済的に効率的（Efficient）なオークションが存在するような条件を示す点である．本オークションは勝者と支払額を不確定入札によって定義される評価関数の写像の不動点を用いて計算することによって，真実申告最良（Truthful）で効率的となる．

第 3 の貢献は，上記の提案オークションよりも，収益を改善できる単一財オークションを探索によって発見する手法を提案する点である．例えば，売り手にとっては，収益を改善させることは重要である．そこで，本論文では，相互依存価値オークションを，ダミープレイヤを含むオークションとして一般化する．ダミープレイヤは，入札を行うことにより，プレイヤ間の競争性を高める．また，ダミープレイヤは，実際，売り手の留保価格として見ることもできる．Likhodedov and Sandholm [8], [9] のアイデアに基づいて，上の一般化されたオークション集合の中からより収益性が高いオークションを特定する．中間（interim）個人合理性（Individual Rationality: IR）が成立するような(注1)，既存の相互依存価値の最適オークションに関する理論 [10] と異なり，本論文で提案するオークションは，事後個人合理性というより好ましい特長をもつ．事後個人合理性とは，プレイヤはある割当に関して，その価値以上に支払うことがあり得ないということを表す．その他にも経済理論の分野で一般に使われる言葉を以下に定義する．

［事後ナッシュ均衡（Ex post Nash Equilibrium）］ i 以外のすべてのプレイヤが最良の戦略 α を選択する（ここでは真の評価値を申告する）なら，プレイヤ i は最良の戦略 α（ここでは真の評価値を申告する戦略）以外の戦略を選択する誘因をもたない．

［パレート効率的（Pareto Efficient）あるいは，効率的（Efficient）］ すべての参加者（オークショニアを含む）の効用の合計（社会的余剰）が均衡において最大化されるとき，そのオークションはパレート効率的である，または効率的であるという．

［真実申告最良（Truthful）］ 真の評価値を申告するのが最良という意味である．本論文では事後ナッシュ均衡を示すが，真の評価値の申告が支配戦略均衡（Strategy-proof）になるメカニズムも真実申告最良の一種である．

また，最近のオークション理論の関連研究の傾向として大まかに，（1）単一財オークションなどの比較的簡単なプロトコルに対してプレイヤのモデルを精ち化する．（2）個人価値などの比較的簡単なプレイヤのモデルに対して新しいプロトコルを設計する．の二つがある．本論文は上記の（1）と（2）を同時に進めており，どちらかというと前者に重点がある．

本論文の構成は，**2.** で関連研究を示し，本研究の位置付けを明らかにする．**3.** で準備として，言葉の定義と，Dasgupta and Maskin [1] で示された不確定入札モデルを示す．**4.** で，線形不確定入札を提案し，その具体例を示した上で，技術的な条件が成立する条件を示す．**5.** で収入を増加させるためのオークションの拡張を示し，実験結果を示す．**6.** はまとめとしての結論である．

2. 関連研究

既存の相互依存価値モデルに関する研究では，オークションは直接顕示メカニズムとして設計されていた．本論文では，直接顕示メカニズムではなく，不確定入札に基づくメカニズムを設計する．直接顕示メカニズ

(注1)：Cremer and McLean [10] はプレイヤのシグナルに小さな相関があれば，売り手は参加者からそのすべての社会的余剰を獲得することができることを示している．しかし，この理論では中間個人合理性を仮定している．事後個人合理性を仮定したような収入最適化に関する成果は，筆者らの知る限りない．

ムは，**3.** で詳細に扱うが，直感的には，各プレイヤが自分の評価値を直接オークショニアに申告するメカニズムをいう．不確定入札モデルでは，直感的には，各プレイヤは，関数形式で，確定していない評価値をオークショニアに申告する．既存の直接顕示フレームワークと不確定入札フレームワークの本質的な特徴の差異は，オークショニアが評価関数やシグナルの値域を知っている必要があるかないかという点にある．例えば，v_{i0}，α_{ij} をシグナルと考え，直接顕示とした場合でも，最低限それらのシグナルの値域までオークショニアが知っていないと，参加者の評価関数を定義することができず，効率的なオークションは実現できない．既存の直接顕示フレームワークと不確定入札に基づく提案フレームワークの差異をまとめると，以下のとおりである．

- 既存の直接顕示フレームワーク

– オークショニアは，各プレイヤの評価関数を明確に定義し計算をするために，前もってすべてのプレイヤの評価関数，及びすべてのプレイヤが申告するシグナルの値域を知っている必要がある．ワインの例でいえば，すべてのプレイヤのワインに対する評価値を決めている評価関数と，すべてのプレイヤのワインに対する評価値がとり得る値域を前もってすべて知っている必要がある．

- 不確定入札フレームワーク

– オークショニアがプレイヤの評価関数やシグナルの値域を知っている必要はない．

– オークショニアは，プレイヤが申告する入札を記述する入札表現規則に関してプレイヤと合意を得ている必要がある．

Dash ら [5] は，Krishna [3] における複数同一財の効率的な直接顕示メカニズムを拡張し，複数の異なる財のメカニズムを提案している．本論文で採用する Dasgupta and Maskin [1] のモデルと異なり，Dash ら [5] のモデルは，メカニズムが前もって各プレイヤの評価関数とシグナルの値域を知っている必要がある．プレイヤはそのシグナルをメカニズムに申告し，メカニズムは割当と支払額を決定する．筆者も過去に，複数財割当問題に関して単一次元シグナルのモデルを提案している [6], [7], [11]．Dash ら [5] と異なり，論文 [6], [7], [11] に提案したメカニズムがプレイヤの評価関数を知る必要はない．しかし，論文 [6], [7], [11] は直接顕示メカニズムとして設計されている．ここでは，プレイヤは評価関数とシグナルの両方を入札する．プレイヤのシグナルを記述するための表現規則に関しては，すべてのプレイヤとメカニズムの共通知識である必要がある．論文 [6], [7], [11] の特徴は，問題に対して特別な構造を仮定している点である．つまり，相互依存性が非循環であると仮定している：「素人」の価値に影響を与える「専門家」が存在する．専門家の価値は，素人のシグナルには影響せず，素人同士はその価値が互いのシグナルに影響される．本仮定のもとで，論文 [6], [7], [11] でのモデルでは，戦略的操作不可能（strategy-proof）なメカニズムの存在を証明しており，十分に一般的である．その他に，2 段階メカニズム [12] と，その他の競上げ価格式メカニズム（例えば，Krishna [3]）では，Dasgupta and Maskin [1] と問題意識が同じで，メカニズムとプレイヤが必要とする知識を制限することを議論している．筆者らの知り得る限り，本論文での Dasgupta and Maskin [1] の不確定入札モデルの具体化に関しては，過去に報告されていない．

3. 準　　備

相互依存価値モデルには

- 不確定入札モデル
- 直接顕示に基づく入札モデル

の二つがある．既存の相互依存価値オークションの研究では，主に直接顕示に基づく入札モデルが使われた．直接顕示に基づく入札モデルでは，各プレイヤが自分のシグナルを直接オークショニアに申告する [1]．一方，本論文で扱う不確定入札モデルでは，シグナルだけではなくシグナルを含むすべての関数形式をオークショニアに申告する．本章では，準備として，まず先行研究である直接顕示に基づくメカニズム [3] を示し，その欠点を議論する．次に，直接顕示に基づくメカニズムに対して，Dasgupta and Maskin [1] が提案した不確定入札に基づくメカニズムの基本部分を紹介する．

まず直接顕示に基づくメカニズムとして以下のオークションを示す．本オークションは Krishna [3] の第 10 章命題 10.1 において一般化 VCG（Generalized Vickrey-Clarke-Groves）と呼ばれているオークションを単一財の状況に適用したものである．したがって，本オークションを単一財一般化 VCG と呼ぶ．単一財一般化 VCG は，相互依存価値を仮定した第 2 価格オークションと等価である．

単一財の問題を考える．プレイヤ $i \in \{1, \ldots, N\}$ は，シグナル空間 S_i にあるシグナル $s_i \in S_i$ をもつ．

財に対するプレイヤ i の評価関数 $z_i(s) \geq 0$ は，結合シグナル $s = (s_1, \ldots, s_N)$ に依存する(注2)．効率的な割当とは，最大の価値をもつプレイヤに財を割り当てることである．準線形効用，すなわち価格 p で財の効用 $z_i(s) - p$，を仮定する．本論文では，ベクトル記述 s_{-i} は $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_N)$ を表す．

まず，オークショニアは，シグナルではなく，評価関数 $(z_1, \ldots, z_N)$ の知識をもつと仮定する．ここで，次のような真実申告最良で効率的な第 2 価格オークションを構築できる．各プレイヤは，シグナル $\hat{s}_i$（真のシグナルでなくてもよい）を申告する．オークショニアは，$z_i(\hat{s})$ をすべての i について計算し，$\max_i\{z_i(\hat{s})\}$ をもつプレイヤに財を割り当て，そのプレイヤに次の p_i を支払わせる．

$$p_i = \min_{s'_i} \quad z_i(s'_i, \hat{s}_{-i}) \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad z_i(s'_i, \hat{s}_{-i}) \geq \max_{j \neq i}\{z_j(s'_i, \hat{s}_{-i})\}$$

本オークションは，$z_i(s) = \max_{j \neq i}\{z_j(s)\}$ になるようなすべての s について，評価関数が，次の単調性（monotonicity）の条件と単一交差条件（single-crossing condition: SCC）を満たすとき，効率的となる．

［単調性（monotonicity）］

$$\frac{\partial z_i(s)}{\partial s_i} \geq 0, \quad \forall s,\ \forall i$$

［単一交差条件（single-crossing condition: SCC）］

$$\frac{\partial z_i(s)}{\partial s_i} > \frac{\partial z_j(s)}{\partial s_i}$$

［定理 1］ 単一財一般化 VCG は，単調性と単一交差条件を満たすとき，効率的である（[3]，第 10 章命題 10.1）．

（証明） 式 (1) より，プレイヤ i には価格 p_i が示される．価格 p_i は i 自身の申告とは独立である．他のプレイヤが真の入札をしていると仮定する．すなわち $\hat{s}_{-i} = s_{-i}$．そして，SCC と単調性により，もしプレイヤ i が正直に入札するとき（つまり $\hat{s}_i = s_i$），その価値が p_i よりも大きいなら財が割り当てられ，そうでないなら，財は割り当てられない（s_{-i} を固定するとすると，SCC は次のことを意味している．p_i を定義する s_{-i} より小さいすべてのシグナルに対して，プレイヤ i は勝者ではなく，s_{-i} より大きいすべてのシグナルに対して，プレイヤ i は勝者である）．真にシグナルを申告することによって，プレイヤは自分の申告に依存しない価格で，その効用を最大化することになる．これは，事後ナッシュ均衡である（支配戦略均衡ではない）．あるプレイヤにとって，他のプレイヤが正直に申告するとき，正直な申告だけが最適反応となる．なぜなら，他のプレイヤの真の評価値の申告が，プレイヤ i の真の価値を正確に決定するのに必要だからである．

上記のオークションは，個人価値モデルでは，Vickrey オークションと同じになる．しかし，本オークションには現実的な問題がある．Dasgupta and Maskin [1] によって議論されているように，オークショニアが，（シグナルを表現可能な入札表現規則を定義するために）プレイヤのシグナル空間を知る必要があり，更に各プレイヤの評価関数 z_i を知る必要がある．これは，非常に大きい負担になり得る．更に各プレイヤはそのシグナルを申告しなくてはならない．一般に，シグナル（例えば，ワインについての情報）は，参加者にとって記述するのが難しい．

それに対して，Dasgupta and Maskin [1] は，不確定入札（Contingent bids）のフレームワークを提案している．$v_i = z_i(s) \geq 0$ をプレイヤ i の財に対する価値とする．プレイヤは不確定入札を提出する．不確定入札とは，$b_i : \mathbb{R}^{N-1}_{\geq 0}$ であり，ここで，$b_i(v_{-i})$ は他のプレイヤの価値 $v_{-i} = (v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_N)$ が与えられたときの申告された価値である．不確定入札が与えられた上で，オークショニアは，申告された価値を，以下の写像の不動点に関して決定する．

$$(v_1, \ldots, v_N) \longmapsto (b_1(v_{-1}), \ldots, b_N(v_{-N}))$$

本論文では，この不動点を，評価値均衡と呼び，不動点を v° と表す．v° が，シグナルが与えられたときの相互依存評価値 $z(s)$ に一致したとき，プレイヤ i は正直に入札していることになる．つまり以下のときである．

$$b_i(z_{-i}(s_i, s'_{-i})) = z_i(s_i, s'_{-i}), \quad \forall s'_{-i},\ \forall s_i$$

これは，すなわち，プレイヤ i は，評価値均衡における i の価値が，シグナル情報 s_{-i} が与えられたときの真の

（注2）：$z_i \ : \ S_1 \times \ldots S_N \ \rightarrow \ \mathbb{R}_{\geq 0}$ は，あるプレイヤの評価関数を，すべてのプレイヤのシグナルの関数として表す．ここでは，$b_i : \mathbb{R}^{N-1}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ は，不確定入札関数を表す．$v_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ は，プレイヤ i の価値を表すために後に用い，$z_i(s)$，若しくは，プレイヤの不確定入札によって定義される不動点に基づいて決定される．

価値と同じであるように不確定入札を提出することを意味している．そして，すべてのプレイヤが正直に入札するなら，不動点は $(v_1^\circ, \ldots, v_N^\circ) = (z_1(s), \ldots, z_N(s))$ となる．

Dasgupta and Maskin [1] は，以下の不確定入札オークションを提案している．あるオークションにおいて評価値均衡が一意に存在するとき，そのオークションはよく定義されている（well-defined）と表現する．

（1） 入札が与えられたら，評価値均衡 $(v_1^\circ, \ldots, v_N^\circ)$（不動点）を計算する．

（2） 不動点において最大の価値をもつプレイヤ i に財を割り当てる．同値の場合はランダムに割り当てる．

（3） 勝者のプレイヤ i の支払額 p_i を計算する．p_i は $v_i' \geq \max_{j\neq i}\{v_j^*\}$ となるような $\min v_i'$ とする．ここで，すべての $j \neq i$ に対して，$v_j^* = b_j(v_i', v_{-ij}^*)$ である．これは，プレイヤ i の入札をある値 v_i' に固定した場合の他のプレイヤの不動点における価値を表す．v_{-ij}^* は，i と j 以外のプレイヤの価値を表す．ベクトル $v_{-i}^* = (v_1^*, \ldots, v_{i-1}^*, v_{i+1}^*, \ldots, v_N^*)$ とすると，ベクトル v_{-i}^* から v_j^* を除いたベクトルを意味する．

勝者の支払額は，その勝者が支払うことができる範囲で，かつ，それでも勝者となるような最小の値とする．

［定理 2］ 評価関数が単調性と SCC を満たし，かつ，不確定入札によって定義される写像の不動点が一意に定まるとき，不確定入札オークションは（事後ナッシュ均衡において）効率的となる [1].

証明は，（不動点の一意性に関する点を除いて）定理 1 の証明と同じ構造である．プレイヤは均衡において正直に入札する．

不確定入札によって，相互依存価値オークションはより実際的なものになる．すなわち，不確定入札を用いることによって，メカニズムは，プレイヤのシグナル空間，または，評価値関数を知っている必要がなくなる．

4. 線形評価関数モデル

4.1 線形入札表現規則の提案

不確定入札を前提としたオークションを実際に実行するには，まず入札表現規則を設定する必要がある．入札表現規則はオークションにおいてプレイヤが自分の入札を記述するために用いられる．入札表現規則は，その表現規則によって作成される入札が，不動点が一意に定まる写像（式 (2)）を定義でき，この不動点において評価関数が単調性と SCC を満たす必要がある．そこで，本論文では，線形入札表現規則を提案する．

$$b_i(v_{-i}) = v_{i0} + \sum_{j\neq i} \alpha_{ij} v_j, \qquad (2)$$

ここで，$v_{i0} \geq 0$ は他のプレイヤが 0 の価値をもつときのプレイヤ i の個人的な価値を表す．$\alpha_{ij} \in [0, 1)$ は，プレイヤ i によって他のプレイヤの価値に対して割り当てられた重みを表す．すなわち，個人的の価値 v_{i0} は，シグナルの役目を果たし，α 重みは，評価関数 $z = (z_1, \ldots, z_N)$ 間の関係についての暗黙的な構造を表す．下の系 1 で示すとおり，すべてのプレイヤ i に関して $\sum_{j\neq i} \alpha_{ij} < 1$ が成立するとき，評価値均衡が一意に存在する．

以下に例を示す．三つの企業，$\{1, 2, 3\}$，があるオークションに参加しているとする．これらの企業の価値は相互に依存する．例えば，企業 1 は，企業 2 と企業 3 のもつ価値に注目している．

$$b_1(v_2, v_3) = 50 + 0.3v_2 + 0.5v_3 \qquad (3)$$

式 (3) では，企業 1 は，企業 2 の価値に 0.3 の重み（α 重み）を置いており，企業 3 の価値に 0.5 の重み（α 重み）を置いている．同じように，企業 2 と企業 3 は以下の（正直な）不確定入札をもつ．

$$b_2(v_1, v_3) = 60 + 0.4v_1 + 0.4v_3 \qquad (4)$$
$$b_3(v_1, v_2) = 70 \qquad (5)$$

つまり，1 と 2 は，他の企業の価値に注意を払っているが，3 は他の企業の価値は無視している．各企業の α 重みの合計は 1.0 以下である．これによって，評価値均衡の一意性が保証される（この結果の詳細は **4.2** で示されている）．以上の入札に基づいて，各企業の価値は，写像（式 (3)，式 (4)，及び式 (5)）の不動点 $(v_1^\circ, v_2^\circ, v_3^\circ)$ として計算される．本ケースでは，不動点は以下を解くことで得られる：

$$v_1^\circ = 50 + 0.3v_2^\circ + 0.5v_3^\circ$$
$$v_2^\circ = 60 + 0.4v_1^\circ + 0.4v_3^\circ$$
$$v_3^\circ = 70$$

したがって，$(v_1^\circ, v_2^\circ, v_3^\circ) = (126.6, 138.6, 70.0)$.

本不動点では，企業 2 が最大値をもつので，企業 2

が勝者となり，支払額は次の v_2' として計算される．$v_2' = \max\{v_1^*, v_3^*\}$．ここで，$v_1^* = b_1(v_2', v_3^*)$ かつ $v_3^* = b_3(v_2', v_1^*)$（つまり，2 の入札が $b_2(v_1, v_3) = v_2'$ のときに他の企業に関して更新した不動点値である）．$v_1^* = b_1(v_2', v_3^*) = 50 + 0.3v_2' + 0.5v_3^*$ かつ，$v_3^* = b_3(v_2', v_1^*) = 70$ であるため，$v_1^* = 85 + 0.3\max\{v_1^*, v_3^*\}$ となる．したがって，$v_1^* > v_3^*$ となる．これより，$v_1^* = 85 + 0.3v_1^*$ かつ，$v_2' = v_1^*$ となる．したがって $v_1^* = 850/7 \approx 121.4$ を得る．したがって，企業 2 は 121.4 の価格で勝つ．ここで，v_1° より小さいことに注意されたい．なぜなら，この企業 1 の不確定価値も，2 がちょうど勝つようなしきい値となる入札を決める場合に減少するからである．

本線形評価関数は各プレイヤが他のプレイヤがオークションに参加するかどうかという情報を事前に知っている必要があり，実用面で大きな制約になり得る．しかし，線形評価関数の簡単な変更でこの点については回避できる．例えば，以下の式 (6) の評価関数は，式 (2) を少し変更しているが，他のプレイヤのうちの最大値を採用するので，個々の他のプレイヤの参加を知っている必要はない．

$$b_i(v_{-i}) = v_{i0} + \alpha \max_{j \neq i} v_j. \tag{6}$$

ここで，$\alpha \in [0, 1)$．次節の技術的条件の確立について，本関数を採用しても本質的には同様な議論が可能である．ただし，その具体的な議論は本論文の範疇を越えるので今後の課題とする．

4.2 技術的条件の確立

本節では，線形入札表現規則について，不動点の一意性と，単調性と単一交差条件（SCC）が満たされることを示す．まず，写像 $(v_1, \ldots, v_N) \mapsto (b_1(v_{-1}), \ldots, b_N(v_{-N}))$ の不動点が一意に決まるための α 重み α_{ij} に関する条件を示す．ここではバナッハの不動点理論 [13] を採用する．

［定理 3］（バナッハの不動点定理） (Y, d) を完全メトリック空間とする(注3)．$f: Y \to Y$ を Y 上の縮小写像とする．すなわち，すべての $x, y \in Y$ に関して，以下が成立するような，ある実数 $q < 1$ があるとする．

$$d(f(x), f(y)) \le q \cdot d(x, y)$$

このとき，関数 f は不動点 x^* をもつ．不動点 x^* は，Y 上の任意の点 x_0 から f を適用した極限（limit）として計算される．

上の縮小写像によって不動点が一意に決まらなければならない理由を示す（バナッハの不動点定理によりその存在性は保証される）：二つの不動点 x 及び y が存在するとする．

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d(f(x), f(y)) \quad \text{不動点より導かれる} \\ &\le q \cdot d(x, y) \quad \text{縮小写像より導かれる} \end{aligned}$$

ある $q < 1$ に対して $d(x, y) \le q \cdot d(x, y)$ をもつのは $d(x, y) = 0$ のときのみである．このとき，d はメトリックであるから $x = y$ である．すなわち，不動点は一意に決まる．

バナッハの不動点定理は，完全なメトリック空間を必要とするが，完全なメトリック空間がコンパクトである必要はない．そこで，Y に対して，非負の評価値空間を採用する．つまり，N 人のプレイヤに対して $\mathbf{R}_{\ge 0}^N$ を採用する．写像 f を $b(v) = (b_1(v_{-1}), \ldots, b_N(v_{-N}))$ として具体化する．ここで，b_i は不確定入札関数である（式 (2)）．これは，$\mathbb{R}_{\ge 0}^N$ への関数である．距離メトリック d を以下のように定義する：$v, w \in \mathbb{R}_{\ge 0}^N$ に関して，

$$d(v, w) = \max_{i \in \{1, \ldots, N\}} |v_i - w_i|.$$

例えば，$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0.5$，及び $v = (v_1, v_2) \in \mathbf{R}_{\ge 0}^2$ と $w = (w_1, w_2) \in \mathbf{R}_{\ge 0}^2$ をもつ二つのプレイヤを考える．ここで，$d(v, w) = \max(|v_1 - w_1|, |v_2 - w_2|)$ 及び，$d(b(v), b(w)) = \max(|v_{10} + v_2/2 - (v_{10} + w_2/2)|, |v_{20} + v_1/2 - (v_{20} + w_1/2)|) = \max(|v_1/2 - w_1/2|, |v_2/2 - w_2/2|)$ が成立する．ここで，$b(v) = v_{10} + v_2/2$ は，式 (2) より導くことができる．明らかに，$\max(|v_1/2 - w_1/2|, |v_2/2 - w_2/2|) < \max(|v_1 - w_1|, |v_2 - w_2|)$ が成立する．

［系 1］ すべてのプレイヤ i に関して $\sum_{j \neq i} \alpha_{ij} < 1$ が成立するとき，評価値均衡が一意に決まる．そして，この均衡は，不確定入札写像 $b: \mathbb{R}_{\ge 0}^N \to \mathbb{R}_{\ge 0}^N$ の列の極限として計算でき，列は任意の $v^0 \in \mathbf{R}_{\ge 0}^N$ から始める．

(注3)：d は以下を満たすなら集合 Y に対するメトリックである：すべての $x, y, z \in Y$ に関して，$d(x, y) + d(y, z) \ge d(x, z)$，$d(x, y) = d(y, x)$，$d(x, x) = 0$，かつ $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ が成り立つ．メトリック空間は，コーシー列のすべての極限を含むなら，完全である．ここで，コーシー列は，$\lim_{m \to \infty} d(x_m, x_{m+1}) = 0$ となるような列である．例えば，$(0, 1)$ は完全ではない．なぜなら，$1/2, 1/3, \ldots$ はコーシーであるが，空間内に極限をもたない．一方，$[0, 1]$，$\mathbf{R}^d$，及び $\mathbf{R}_{\ge 0}^d$ 等は完全である．完全なメトリック空間は閉じている（またはコンパクトである）必要はない．

（証明）　ある $v, w \in \mathbb{R}^N_{\geq 0}$ に固定し，$\max_i\{|b_i(v) - b_i(w)|\} < \max_i\{|v_i - w_i|\}$ を示す．任意のプレイヤ i を考える．ここで，$|b_i(v) - b_i(w)| < \max_{j\neq i}\{|v_j - w_j|\}$ が成立することを示す．展開すると，$|v_{i0} + \sum_{j\neq i} \alpha_{ij} v_j - (v_{i0} + \sum_{j\neq i} \alpha_{ij} w_j)| < \max_{j\neq i}\{|v_j - w_j|\}$ となる．更に，$|\sum_{j\neq i}(v_j - w_j)| < \max_{j\neq i}\{|v_j - w_j|\}$ となる．これを示すためには，$\sum_{j\neq i} \alpha_{ij}|v_j - w_j| < \max_{j\neq i}\{|v_j - w_j|\}$ を示せばよい．ここで，$\sum_{j\neq i} \alpha_{ij} < 1$ かつ $\alpha_{ij} \in [0, 1)$ であることから，$\sum_{j\neq i} \alpha_{ij}|v_j - w_j| < \max_{j\neq i}\{|v_j - w_j|\}$ は真となる．

したがって，一意性に関しては，その入札表現規則が，プレイヤ i が他のプレイヤの価値に対して割り当てる重みの合計を，$\sum_{j\neq i} \alpha_{ij} < 1$ となるように制限できるなら十分である．事後ナッシュ均衡を形成するための真の評価値に基づく入札のためには，この不確定入札モデルにおける単一交差条件（SCC）や単調性条件が必要である．まず本不確定入札における単一交差条件を示す．

［系 2］　すべてのプレイヤ i の不確定入札が $\sum_{j\neq i}\alpha_{ij} < 1$ であるなら，すべてのプレイヤ i, j に関して $\partial v^\circ_j/\partial v_{i0} < \partial v^\circ_i/\partial v_{i0}$ である．

（証明）　有限数のプレイヤ N を考える．ここで，w_i はプレイヤの入札の v_{i0} を表すものとする．ここでは，次を仮定し，矛盾を導き出す．

$$\frac{\partial v^\circ_1}{\partial w_1} \leq \frac{\partial v^\circ_2}{\partial w_1} = \alpha_{21}\frac{\partial v^\circ_1}{\partial w_1} + \sum_{j\neq\{1,2\}} \alpha_{2j}\frac{\partial v^\circ_j}{\partial w_1}$$

$\sum_{j\neq 1} \alpha_{1j} < 1$ かつ $\alpha_{1j} \geq 0$ であるため，これは，$N > 2$ かつ $j \neq \{1, 2\}$ に関して $\partial v^\circ_j/\partial w_1 > \partial v^\circ_2/\partial w_1$ であることを意味している．一般性を失うことなしに，$\partial v^\circ_3/\partial w_1 > \partial v^\circ_2/\partial w_1 \geq \partial v^\circ_1/\partial w_1$ を仮定する．プレイヤ 3 を考えると，これは以下を必要とする．

$$\alpha_{31}\frac{\partial v^\circ_1}{\partial w_1} + \alpha_{32}\frac{\partial v^\circ_2}{\partial w_1} + \sum_{j\neq\{1,2,3\}} \alpha_{3j}\frac{\partial v^\circ_j}{\partial w_1} > \frac{\partial v^\circ_2}{\partial w_1}$$

したがって，我々は $N > 3$ のプレイヤをもつ必要がある．一般性を失うことなしに，$\partial v^\circ_4/\partial w_1 > \partial v^\circ_3/\partial w_1$ を仮定する．この推論は永久に続けられ，任意の有限数のプレイヤに関して矛盾を導き出すことになる．

単調性，すなわち，$v^\circ_i/\partial v_{i0} \geq 0$ は明らかである．なぜなら，写像 $v \mapsto b(v)$ のすべての係数は非負であるからである．

［定理 4］　入札表現規則が十分に表現に富む（expressive）とき，線形入札表現規則で定義した不確定入札オークションは，事後ナッシュ均衡において効率的となる．

「表現に富む（expressive）」とは，プレイヤが，その入札表現規則によって，他のプレイヤの価値が何であろうと，その真の価値と同値の入札値を定義できるような入札表現規則であることを意味する．証明は，系 1 及び系 2，更に定理 2 より，すぐに得られる．非形式的には，まずオークションがよく定義（well-defined）されるように一意性が成立することを示す．そして，プレイヤ $j \neq i$ からの入札 b_{-i} を固定する．すると，プレイヤ i の支払額は，自分自身の価値には依存しない価格になる．本支払額は，入札 b_{-i} が与えられたとき，評価値均衡においてプレイヤ i が勝つような，不確定でない最小の入札 $b'_i(v_{-i}) = v'_{i0}$ に関して定義された支払額である．そして，SCC と単調性，及び，他のプレイヤが真に入札をすると仮定すると，i の真の価値がこの価格より大きいときは，真の入札をすれば，i は勝ち，この支払額を支払う．もしこの価格より大きくないときは，勝つことはない．プレイヤは，自らの価値 v_{i0} や α 重みの申告ミスをしても，多くを得られることはないことに注意されたい．

5. 収入の最適化

本章では，相互依存価値オークションを改良して，収益をより改善する．Likhodedov and Sandholm [8] で提案された方法に従って，売り手の留保価格を入札する「ダミープレイヤ」（$i = 0$ とする）を導入する．更に，Myerson [14] の最適オークションで最初に提案された方法に従い，各プレイヤに対する静的な重み $\beta_i \in [0, 1]$（β 重みと呼ぶ）を付けて勝者決定問題を再定義する．β 重みを用いて，競争力のないプレイヤに有利になるような重み付けをすることで，平均的に収益が改善することが期待できる [8], [14]．α 重みと β 重みの違いは以下のとおりである．α 重みは，本論文で提案された線形相互依存価値モデルにおいて，あるプレイヤが他のプレイヤの価値を自分の価値に依存させている程度を表すもので，各プレイヤが決める値である．一方 β 重みはオークショニアやオークションデザイナーが事前に設定する値である．Likhodedov and Sandholm [8] 及び Myerson [14] では，個人価値のオークションのための方法が提案されたが，本論文では，相互依存価値オークションのための方法を提案する．

次の式を解くように割当 $x = (x_0, x_1, \ldots, x_N)$ が

選択される．本オークションでは，$x_i \in \{0,1\}$ かつ $\sum_{i=0}^{N} x_i = 1$ であり，$x_0 \in \{0,1\}$ はダミープレイヤが財を得て財が売られないかどうかを意味する．

$$\max_x \left\{ \beta_0 v_0(x) + \sum_{i=1}^{N} \beta_i v_i^{\circ}(x) \right\},$$

ここで，もし $x_i = 1$ でそれ以外が 0 ならば $v_i^{\circ}(x) = v_i^{\circ}$ である．$x_0 = 1$ でそれ以外が 0 ならば $v_0(x) = v_0$ であり，ダミープレイヤの価値を表している（v_0 は留保価格として考えることもできる）．そして v_i° はプレイヤの不動点での価値である．

価値 v_0 と，β 重み β は，プレイヤの価値についての事前情報を用いてオークションデザイナーやオークショニアにより経験的に設定され，入札を受け取る前に固定される．重み付き相互依存価値オークションは以下のステップ 1，ステップ 2，ステップ 3 及びステップ 4 で定義される：

［ステップ 1］ v_0 及び β 重み $\beta \in [0,1]^{N+1}$ を決める．

［ステップ 2］ 入札を受け取り，不動点 $(v_1^{\circ}, \ldots, v_N^{\circ})$ を計算する（プレイヤは，ダミープレイヤの価値に対して依存する入札を作ることはできない．更に，ダミープレイヤの価値は不確定でなく，v_0 に固定される）．

［ステップ 3］ 最大の重み付きの価値をもつプレイヤを勝者とする．もしダミープレイヤが勝者になったら，財は売られず，収入は得られない，とする．

［ステップ 4］ もし，財がプレイヤ $i \neq 0$ に売られたなら，支払額を以下のように計算する：v_i' を $\beta_i v_i' = \max_{j \neq i,\, j=0} \{\beta_j v_j^*\}$(注4)となるまで減少する．ここで，$v_j^*$ は，価値 v_i' をプレイヤ i に与えたときのプレイヤ j に対する新しい不動点である（つまり，すべての j に対して $v_j^* = b_j(v_i', v_{-ij}^*)$ である）．i が勝てなくなるちょうどその値が支払額となる．

明らかに，本オークションは，重み（α 重みと β 重みの両方を含んだ意味での重み）が対称的で，かつ，$v_0 = 0$ のとき，標準的な相互依存価値オークションと同一になる．Myerson [14] の最適オークションに関する成果から予測できるが，競争力のないプレイヤにバイアスがかかるような重み付けによって，収益が改善されることが期待できる．また，本オークションが真の評価値の入札を引き出すこともおよそ明らかである．勝者の支払額が，勝者の入札とは独立であり，勝者は不動点における評価値がその支払額より大きい場合にのみ勝つ，ということを示せばよい．

本実験では，対称的な環境及び非対称的な環境を想定する．対称的な環境では，各プレイヤ $i \neq 0$ のシグナル s_i は，一様分布 $s_i \sim Uniform(0,100)$ からサンプリングされる．非対称的な環境では，プレイヤ i のシグナルは，$L_i = 10 + i\delta$ かつ $\delta = \frac{300-10}{N}$ である一様分布 $Uniform(0, L_i)$ からサンプリングされる．これは，非対称的な環境において，プレイヤのインデックス（数字）が増えるに従って，期待シグナル値が増えることを意味する．そして，各プレイヤ i に対して，以下のように不確定評価値を定義するような α 重みを決める：

(1) 各 $j \neq i$ に関して，0.5 の確率で $\alpha_{ij} = 0$ とする．また 0.5 の確率で，一様分布 $Uniform(0,1)$ から α_{ij} をサンプリングする．

(2) α 重みの合計 m_i を以下のように決定する：

(3.1) 対称的な環境では，平均 0.5，標準偏差 0.25 の正規分布からサンプリングし，$[0,1)$ の範囲内に切り下げる．

(3.2) 非対称的な環境では，平均 $\mu_i = 0.3 + i\delta'$，ここで $\delta' = \frac{1.0-0.3}{N}$，標準偏差 0.25 の正規分布からサンプリングし，$[0,1)$ の範囲内に切り下げる．他のプレイヤの価値に対して与えた期待合計 α 重みをプレイヤのインデックスが増えると同時に増やすという意味になる．

(4) α 重みの合計が m_i になるように，各 α_{ij} 重み α_i を正規化する．

本実験の目的は，期待収益を最大化するパラメータ $(v_0, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_N)$ を探すことである．具体的には，パラメータ $(v_0, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_N)$ を変化させながら（以下で詳述する），各パラメータに関して，上のステップ 1 からステップ 4 を 1 ケースとして実験を行った．そして，期待収益を最大化するパラメータを特定し，得られた結果が図 1 及び図 2 である．

パラメータの変更の方法は，すべてのケースにおいて，β 重みを $\beta_0 = 1/N$ 及び $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$ となるように正規化し，これによって，$\sum_{i=0}^{n} = (1+N)/N$ となるようにする．正規化では，まず $i > 1$ の重みを設定した後，β_1 を設定する．探索空間は，$v_0 \in \{0, 10, \ldots, 100\}$，及び $\beta_i \in \{0, 0.1, \ldots, 1\} \cup \{1/N\}$ のように離散化する．本論文での目標は相互依存価値オークションにおいて収益を改善し得る点を示すことであるから，ここ

(注4)：これは，j が i でない値のうち，$\beta_j v_j^*$ の最大値を表している．$j = 0$ と書いたのは，j が 0（ダミープレイヤ）の場合もあり得るということを強調したためである．プレイヤ j の定義は，プレイヤ i の定義 $i \in \{1, \ldots, N\}$ に準じているので，$j = 0$ も含めることを強調した．

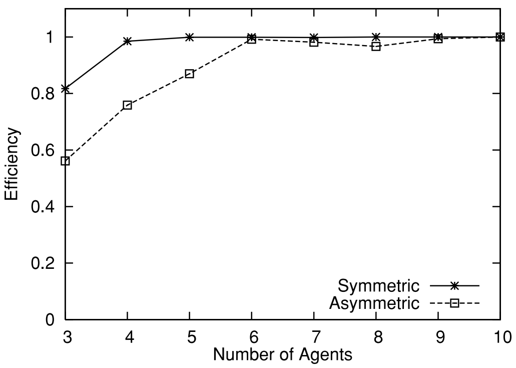

図 1　対称的及び非対称的な環境における最適オークションでの平均（経済的）効率性

Fig. 1　Average efficiency in the optimal auction for the symmetric and asymmetric environments.

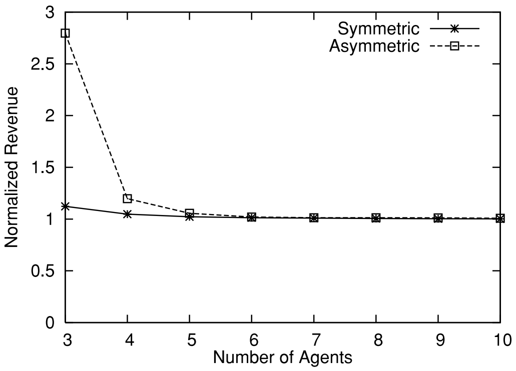

図 2　対称的及び非対称的な環境における最適オークションでの平均正規化収入

Fig. 2　Average normalized revenue in the optimal auction for the symmetric and asymmetric environments.

では問題サイズは大きくせず，すべての格子の点を単純に列挙して調べる方法を採用した．今後の課題として，Likhodedov and Sandholm [9] で採用されたような，ローカルサーチの方法を用いることがある．

実験では，対称的な環境では 1 ケースにおいて 4000 のインスタンス，非対称的な環境では 1 ケースにおいて 5000 のインスタンスの結果を平均した．そして，本章で提案する最適オークションと，前章で提案した標準的な不確定入札オークションの平均収益と（経済的な）効率性を比較した．

図 1 は，最適オークションの平均効率性を示している．すなわち，プレイヤ数を変化させたときの，最適オークションにおける値と（標準的相互依存価値オークションで得られた）最大値との比の平均である．図 2 は，最適オークションの平均正規化収益を示している．すなわち，プレイヤ数を変化させたときの，最適オークションの収益と効率的なオークション収益の平均的な比である．予想したとおり，オークションは収益に対して最適化し得る．しかし，効率性に関しては多少の減少がある．そして，プレイヤ数が 5 以上になると急速に収益の改善は見られなくなる．更に，本論文で用いた分布関数では，非対称的な設定の場合の方が，対称的な設定の場合よりも多くの収益を得られている．

パラメータに関しては，対称的な環境では，対称的な β 重みによって最適になっている．非対称的な環境では，最適な β 重みは非対称になっている．例えば，プレイヤ数が 3 の場合は，最適な β 重みの割当は，プレイヤ 1 に 0.5，プレイヤ 2 に 0.3，及びプレイヤ 3 に 0.2 である．更に，最適な β 重みは，プレイヤのインデックスが増えるに従って，減っている．これは，Myerson [14] の非対称個人価値オークションの研究から予測できる．これにより，ローカルサーチを使う場合，プレイヤのインデックスに従って，減少するような β 重みの割当をするような状態のみを探すという戦略は有用であることが分かる．非対称的な環境における最適な v_0（留保価格）は 50 から 110 の間であり，平均的に 80 である．

6. むすび

本論文では相互依存価値オークションの具体的なプロトコルを提案するために，Dasgupta and Maskin [1] のより一般的な不確定入札モデルを具体化した．本論文では，単純な線形入札表現規則を提案し，線形入札表現規則が不確定入札に基づく第 2 価格オークションの効率性を満たすための条件を満たすことを示した．更に期待収益に関してよりよい結果を得られるオークションプロトコルを示した．本オークションを複数財に拡張したオークションの設計についても進めている [15]．

文　献

[1] P. Dasgupta and E. Maskin, “Efficient auctions,” The Quarterly Journal of Economics, vol.CXV, pp.341–388, 2000.

[2] T. Ito and D.C. Parkes, “Instantiating the contingent bids model of truthful interdependent value auctions,” Proc. International Joint Conference on Autonomous Agents and Multi Agent Systems (AAMAS-06), pp.1151–1158, 2006.

[3] V. Krishna, Auction Theory, Academic Press, 2002.

[4] P. Jehiel and B. Moldovanu, “Efficient design with

interdependent valuations,” Econometrica, vol.69, no.5, pp.1237–1259, 2001.

[5] R.K. Dash, A. Rogers, and N.R. Jennings, “A mechanism for multiple goods and interdependent valuations,” Proc. 6th Int. Workshop on Agent-Mediated E-Commerce, pp.197–210, 2004.

[6] T. Ito, M. Yokoo, and S. Matsubara, “Designing an auction protocol under asymmetric information on nature’s selection,” Proc. 1st International Joint Conference on Autonomous Agents and Multi-Agent Systems (AAMAS02), pp.61–68, 2002.

[7] T. Ito, M. Yokoo, and S. Matsubara, “A combinatorial auction protocol among versatile experts and amateurs,” Proc. 3rd International Joint Conference on Autonomous Agents and Multi-Agent Systems (AAMAS04), pp.378–385, 2004.

[8] A. Likhodedov and T. Sandholm, “Methods for boosting revenue in combinatorial auctions,” Proc. National Conference on Artificial Intelligence (AAAI), pp.232–237, 2004.

[9] A. Likhodedov and T. Sandholm, “Approximating revenue-maximizing combinatorial auctions,” Proc. National Conference on Artificial Intelligence, pp.267–274, 2005.

[10] J. Cremer and R.P. McLean, “Full extraction of surplus in Bayesian and dominant strategy aucitons,” Econometrica, vol.56, no.6, pp.1247–1257, 1988.

[11] T. Ito, M. Yokoo, and S. Matsubara, “Towards a combinatorial auction protocol among experts and amateurs: The case of single-skilled experts,” Proc. 2nd International Joint Conference on Autonomous Agents and Multi-Agent Systems (AAMAS03), pp.481–488, 2003.

[12] M. Perry and P.J. Reny, “An efficient auction,” Econometrica, vol.70, no.3, pp.1199–1212, 2002.

[13] R. Vohra, Advanced Mathematical Economics, Routledge, 2005.

[14] R.B. Myerson, “Optimal auction design,” Mathematics of Operations Research, vol.6, pp.58–73, 1981.

[15] 伊藤孝行，ディビッド　パークス，“相互依存価値モデルに基づく不確定入札を用いた真実申告最良な組合せオークションの設計，” 信学論（D），vol.J90-D, no.5, pp.1219–1228, May 2007.

（平成 18 年 6 月 20 日受付，10 月 4 日再受付）

伊藤　孝行　（正員）

平 12 名古屋工業大学大学院了．博士（工学）．平 11～13 にかけて日本学術振興会特別研究員．平 12～13 にかけて南カリフォルニア大学客員研究員．平 13 北陸先端科学技術大学院大学知識科学教育研究センター助教授．平 15 より名古屋工業大学大学院情報工学専攻助教授．平 17～18 にかけて米国ハーバード大学及びマサチューセッツ工科大学客員研究員．平 18 名古屋工業大学大学院産業戦略工学専攻助教授．現在に至る．AAMAS2006 Best Paper Award 受賞．2005 年度日本ソフトウェア科学会論文賞受賞．平 16 年度 IPA 未踏ソフトウェア創造事業スーパークリエータ認定．第 66 回情報処理学会全国大会優秀賞及び奨励賞受賞．マルチエージェントシステム，計算論的メカニズムデザイン，電子商取引支援に興味をもつ．AAAI，ACM，人工知能学会，情報処理学会，日本ソフトウェア科学会，計測制御自動学会，日本経済学会各会員．

David C. Parkes

is the John L. Loeb Associate Professor of the Natural Sciences and Associate Professor of Computer Science at Harvard University. He received his Ph.D. degree in Computer and Information Science from the University of Pennsylvania in 2001, and an M.Eng. (First class) in Engineering and Computing Science from Oxford University in 1995. He was awarded the prestigious NSF CAREER Award in 2002, an IBM Faculty Partnership Award in 2002 and 2003, and the Alfred P. Sloan Fellowship in 2005. Parkes has published extensively on topics related to electronic markets, computational mechanism design, auction theory, and multi-agent systems. He serves on the editorial board of the Journal of Artificial Intelligence Research and the Electronic Commerce Research Journal, and has served on the Program Committee of a number of leading conferences in artificial intelligence, multiagent systems and electronic commerce, including ACM-EC, AAAI, IJCAI, UAI and AAMAS. He is the co-program chair of the ACM Conference on Electronic Commerce, 2007.